Изменение интенсивности на каустике автофокусирующихся чирп-пучков в зависимости от амплитуды падающего пучка

Устинов Андрей Владимирович, Скиданова Анна Романовна

Abstract

We have obtained an expression for the amplitude and intensity of the field along the caustic line, which is formed during autofocusing when the generalized lens is illuminated. Two types of the incident beam amplitude are considered: the product of a power and generalized exponential function; fractional-rational amplitude without singularities. With different ratios between the parameters, the dependence of intensity on distance will have a diverse form – increasing, decreasing, with a maximum, with a minimum. At the same time, the edge values (at distances z=0 and z→∞) can also be different: zero, positive number, infinity.

Введение

Первоначально явление самофокусировки было обнаружено в нелинейных средах, но и в линейной среде лазерный пучок также может проявлять похожие свойства, если в исходном поперечном распределении пучка имеется градиент фазы. Такое явление принято называть автофокусировкой.

Круговые пучки Эйри имеют свойство резкой автофокусировки [Efremidis N.K., Christodoulides D.N., Opt. Lett.; 2010; 35(23): 4045-4047]. Это свойство полезно в различных приложениях, поэтому изучались и другие пучки с свойством автофокусировки, например, пучки Пирси, аберрационные пучки, чирп-пучки, обобщённые пучки Эйри.

Круговые пучки Эйри с асимптотической зависимостью фазы $r^{3/2}$, соответствуют сублинейному чирпу. Они принадлежат к **семейству** пучков, имеющих радиальную зависимость фазы r^q, q - **любое положительное**, в том числе q>2 (сверхлинейный чирп). Оптические элементы с такой зависимостью фазы называются обобщёнными линзами и обобщёнными аксиконами.

В работе [Khonina, S.N., Porfirev, A.P., Ustinov, A.V., Journal of Optics; 2018; 20(2): 025605] были выведены условия, при выполнении которых при освещении обобщённой линзы *плоским пучком* формируется **линия каустики** и получено её уравнение. (Стоит отметить, что каустики являются интересными оптическими явлениями. Наиболее известные примеры в природе – радуга и яркие световые линии в емкостях с водой.) В [А.В. Устинов, С.Н. Хонина, Компьютерная оптика; 2020; 44(5): 721-727] приведены дополнительные подробности.

В докладе [A.V. Ustinov, E.O. Monin, IEEE Proceedings of ITNT-2022] вычислено распределение амплитуды и интенсивности вдоль линии каустики при освещении пучком с амплитудой двух видов: *степенная* функция (в частности, константа) и *обобщённая экспоненциальная* функция. Данный доклад является его продолжением, и мы рассмотрим два других вида падающего пучка: амплитуда в виде *произведения степенной и обобщённой экспоненциальной* функции; *дробно-рациональная* амплитуда.

Теоретический анализ распределения амплитуды поля на каустике

Пусть на *собирающую* обобщённую линзу падает пучок с радиально симметричной амплитудой A(r), тогда начальное поле будет равно $A(r)\exp\left(-i(k\alpha r)^q\right)$

Далее будем предполагать, что мы находимся в рамках применимости преобразования Френеля. Ранее было обосновано, что для анализа поля вдоль линии каустики целесообразно использовать не исходную формулу Френеля, а её приближение, пригодное в области, не очень близкой к оптической оси.

$$E(\rho,z)\approx -ie^{i\pi/4}\sqrt{\frac{k}{2\pi z\rho}}\exp\left(ik\frac{\rho^2}{2z}\right)\times\int_0^\infty A(r)\exp\left(-i(k\alpha r)^q\right)\exp\left(ik\frac{r^2}{2z}\right)\exp\left(-ik\frac{\rho r}{z}\right)\sqrt{r}\,dr \qquad (1)$$

Для получения уравнения линии каустики и распределения амплитуды/интенсивности вдоль неё используем классический метод стационарной фазы. В таком случае линия каустики, которая существует *только* при q>2, *не зависит* от A(r). Уравнение линии ρ(z) следующее:

$$a=\left[k^{-1}(k\alpha)^q q(q-1)\right]^{\frac{1}{2-q}};\quad r_0=az^{\frac{1}{2-q}};\quad \rho(z)=\frac{q-2}{q-1}r_0 \qquad (2)$$

Не показывая подробностей расчёта, приведём окончательное выражение для **амплитуды поля** на каустике:

$$A_1=-ie^{i\pi/4}\frac{\Gamma(1/3)}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{\sqrt[6]{6}}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{q-2}}\exp\left(\frac{ik\rho^2}{2z}\right)\cdot e^{-i\psi(r_0)}\qquad E(\rho,z)=A(r_0)\cdot A_1\cdot\frac{\sqrt{q-1}}{\sqrt{q-2}}\cdot\alpha^{-\left(\frac{q}{3(q-2)}\right)}\left[q(q-1)\right]^{-\left(\frac{1}{3(q-2)}\right)}\cdot(kz)^{-\left(\frac{q}{6(q-2)}\right)} \qquad (3)$$

От амплитуды падающего пучка зависит множитель $A(r_0)$. Если она имеет вид **произведения степенной и обобщённой экспоненциальной (I)** функций: $A(r)=\exp\left[-(\mu r)^s\right]\cdot(\beta r)^{-p}, s>0$ то, опустив множители, не зависящие от z, получим выражение для интенсивности вдоль линии каустики.

$$I(\rho,z)\sim z^{\frac{q-6p}{3(2-q)}}\cdot\exp\left[-2\left(\mu a z^{\frac{1}{2-q}}\right)^s\right] \qquad (4)$$

Подобным образом, при амплитуде падающего пучка в виде **дробно-рациональной (II)** функции: $A(r)=\frac{r^m}{\left(\alpha_1^2+r^2\right)^s}$

$$I(\rho,z)\sim z^{\frac{6m+q}{3(2-q)}}\cdot\left(\alpha_1^2+a^2z^{\frac{2}{2-q}}\right)^{(-2s)} \qquad (5)$$

Примеры; графические иллюстрации

При **падающем поле I** анализ выражения (4) показывает, что возможны **три** качественно отличных вида зависимости интенсивности от расстояния. При **p>q/6** интенсивность растёт от нуля до *бесконечности* (рис. 1а); при **p=q/6** рост до *конечного числа;* при **p<q/6** растёт от нуля до максимума, а затем убывает до нуля (рис. 1б).

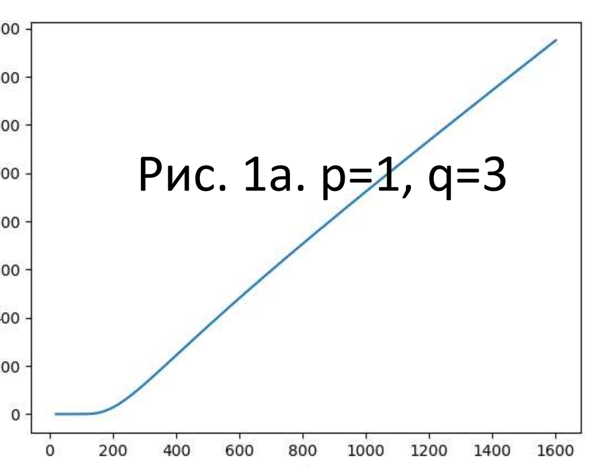

Рис. 1а. p=1, q=3

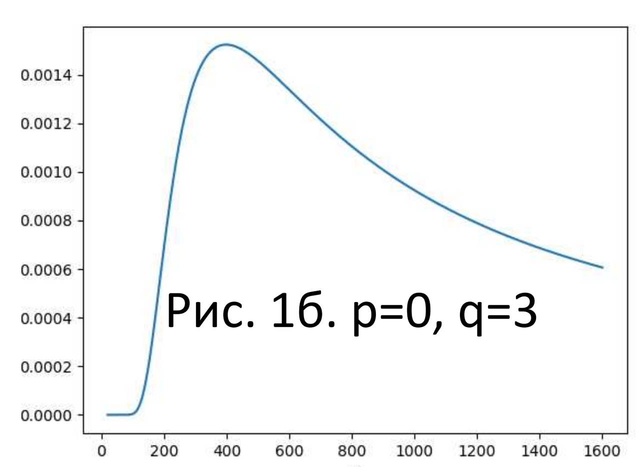

Рис. 1б. p=0, q=3

При **падающем поле II** анализ выражения (5) показывает, что возможны **девять** видов зависимости интенсивности от расстояния. Приведём графики только для **четырёх** видов, когда определяющие неравенства **строгие**. Рис. 2а) соответствует области **0<m+q/6<2s(s>0)**; рис. 2б) области **m+q/6>2s(s>0)**; рис. 2в) области **m+q/6<0(s>0)**; рис. 2г) области **2s<m+q/6<0(s<0)**. На рис. 2г) имеется *минимум*. В случае **нестрогих** неравенств (теоретически это ситуация меры нуль) одно из краевых значений становится *конечным положительным* числом. Для всех графиков **q=3**.

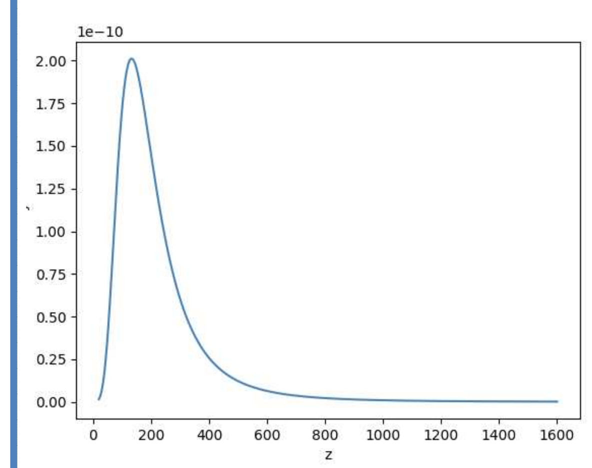

Рис. 2а. m=1.5, s=2

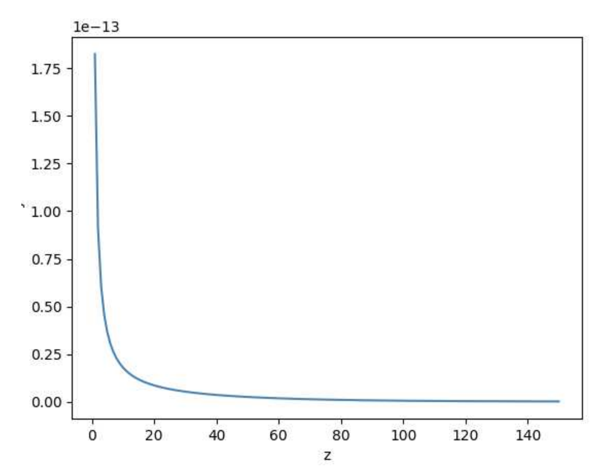

Рис. 2б. m=3, s=1.5

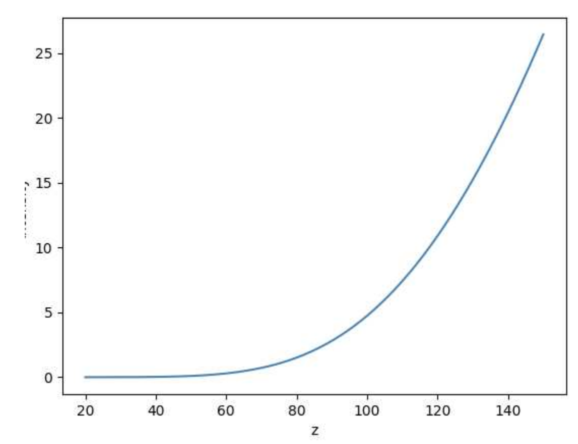

Рис. 2в. m=-1, s=1.5

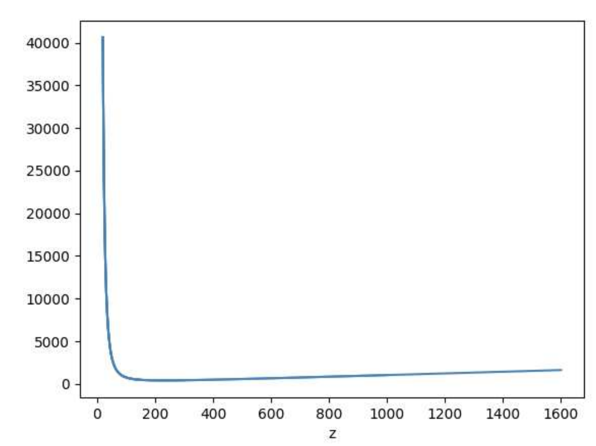

Рис. 2г. m=-1, s=-1

Итак, мы показали, что зависимость яркости каустики от расстояния может иметь разнообразный вид, особенно при освещении пучком с дробно-рациональной амплитудой: быть возрастающей/убывающей, иметь максимум/минимум. Кроме того, краевые значения (при z=0 и z=∞) могут принимать все возможные значения: нуль, конечное положительное число, бесконечность, пусть реализуются и *не все пары.*

Доклад выполнен при поддержке гранта РНФ № 21-79-20075

ИСОИ РАН [1] IMAGE PROCESSING SYSTEMS INSTITUTE
151, Molodogvardeyskaya st., Samara, Russia (www.ipsi.smr.ru)

САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ SAMARA UNIVERSITY

[2] SAMARA NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY
34, Moskovskoye shosse, Samara, Russia (www.ssau.ru)